外国語教育メディア学会 (LET) 関西支部 メソドロジー研究部会 2012 年度報告論集
住 政二郎 (pp.83–101)

ラッシュモデルの導出

住 政二郎
流通科学大学

概要

本稿の目的は，静 哲人（2007）.『基礎から深く理解するラッシュモデリング：項目応答理論とは似て非なる測定のパラダイム』関西大学出版部. をもとにラッシュモデルの導出について解説することである。静（2007）はラッシュモデルについて日本語で読める数少ない貴重な書籍である。前半の 5 つの章を数学的予備知識の準備に当て，文系読者でもラッシュモデルを文字通り深く理解することができる。より重要なことは，ラッシュモデルの概説にとどまらず，教育測定の客観性について深い考察を加え，ラッシュモデルに到達する必然性が述べられている点である。しかし,「第 7 章 ラッシュモデルの導出」にはほんの一部だが重要な誤りがある。そこで著者の許可を得て，本稿でその誤りを修正し，静（2007）をもとにラッシュモデルの導出について解説することにした。その意図は誤りを指摘することではない。初学者が，静（2007）をどのように読み，どのように理解したのかを紙面で再現し，次の読者の伴走をすることである。身の丈を上回る課題ではあるが，著者が情熱を込めてまとめたこの本を，これからラッシュモデルについて学ぶ院生，そして教育測定に関わる人に読んでもらいたい一心である。

Keywords: ラッシュモデル，確率，オッズ，ログ，対数

1. ラッシュモデル導出のための初期設定

本稿では，以下 3 つの形式のラッシュモデルを導出する。

$$\log\left(\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}\right)=\theta_m-\delta_i \tag{1}$$

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}=\exp(\theta_m-\delta_i) \tag{2}$$

$$P_{mi}=\frac{\exp(\theta_m-\delta_i)}{1+\exp(\theta_m-\delta_i)} \tag{3}$$

式（1）は，オッズのログ形式のラッシュモデルである。式（2）は，オッズ形式のラッシュモデルである。そして，式（3）は，確率形式のラッシュモデルである。これらは同じモデルを 3 通りの形式で表現したものである。

ラッシュモデルの導出は，以下のわずかな初期設定からはじめる。[1]

> ここに受験者 m と受験者 n の 2 人がいる。そして問題 i と問題 j の 2 問がある。受験者 m と受験者 n が問題 i と問題 j に解答した。その結果から受験者 m と受験者 n のどちらがより高い能力を持っているのかを知りたい。
>
> ただし，受験者 m については，どのくらいの能力があるのかは予め分かっていない。つまり受験者 m の能力値は不明である。
>
> 受験者 n については，標準的な能力（能力値 = 0）であることが予め分かっている。
>
> 問題 i については，どのくらい難しい問題であるかは予め分かっていない。つまり問題 i の難度値は不明である。
>
> 問題 j については，標準的な難度（難度値 = 0）であることが予め分かっている。
>
> 標準的な能力の受験者とは，標準的な難度であることが予め分かっている問題を何度も解答したときに，正答率が 50%である受験者のことである。
>
> 標準的な難度の問題とは，標準的な能力であることが予め分かっている受験者が何度も解答したときに，正答率が 50%である問題のことである。

受験者の能力と問題の難度の設定を一覧にすると以下のようになる。

> 能力値が不明な受験者 m
>
> 能力値が標準値 = 0 の受験者 n
>
> 難度値が不明な問題 i
>
> 難度値が標準値 = 0 の問題 j

ラッシュモデルの導出に必要な初期設定は以上である。受験者 2 名と問題 2 問を用意し，受験者と問題の一方を標準値 = 0 と定めるだけでラッシュモデルの導出ができる。後から設定を増やすことも減らすこともない。あまりにあっけない設定ではあるが，このシンプルさ故にラッシュモデルは教育測定の客観性について揺るぎない地位を確立している（靜，2007，p. 355）。

2.　受験者と問題の組み合わせ

受験者 m と受験者 n が問題 i と問題 j に解答したとき，起こり得るすべての結果は以下のようになる。

受験者 m が問題 i に正解

受験者 m が問題 i に不正解

受験者 m が問題 j に正解

受験者 m が問題 j に不正解

受験者 n が問題 i に正解

受験者 n が問題 i に不正解

受験者 n が問題 j に正解

受験者 n が問題 j に不正解

上記の結果には、それぞれ起こり得る確率を考えることができる。すなわち：

受験者 m が問題 i に正解する確率

受験者 m が問題 i に不正解する確率

受験者 m が問題 j に正解する確率

受験者 m が問題 j に不正解する確率

受験者 n が問題 i に正解する確率

受験者 n が問題 i に不正解する確率

受験者 n が問題 j に正解する確率

受験者 n が問題 j に不正解する確率

確率は英語で *Probability* であり，数学的にはその頭文字をとり P で表現する。例えば，受験者 m が問題 i に正解する確率は P_{mi} となる。

不正解する確率は，[不正解確率 = 1– 正解確率] で得られる。故に，受験者 m が問題 i に不正解する確率は $1 - P_{mi}$ になる。同様に，m, n, i, j の記号だけを使って，受験者 m と受験者 n が問題 i と問題 j に解答したときに，起こり得るすべての結果の確率を記号で表現すると，以下のようになる。

P_{mi}：受験者 m が問題 i に正解する確率

$1 - P_{mi}$：受験者 m が問題 i に不正解する確率

P_{mj}：受験者 m が問題 j に正解する確率

$1 - P_{mj}$：受験者 m が問題 j に不正解する確率

P_{ni}：受験者 n が問題 i に正解する確率

$1 - P_{ni}$：受験者 n が問題 i に不正解する確率

P_{nj}：受験者 n が問題 j に正解する確率

$1 - P_{nj}$：受験者 n が問題 j に不正解する確率

さらに，受験者 m と受験者 n が問題 i に解答したときの組み合わせと、受験者 m と受験者 n が問題 j に解答したときの組み合わせは、以下のようになる。

受験者 m と受験者 n が問題 i に正解
受験者 m と受験者 n が問題 i に不正解
受験者 m は問題 i に正解し，受験者 n は問題 i に不正解
受験者 m は問題 i に不正解し，受験者 n は問題 i に正解
受験者 m と受験者 n が問題 j に正解
受験者 m と受験者 n が問題 j に不正解
受験者 m は問題 j に正解し，受験者 n は問題 j に不正解
受験者 m は問題 j に不正解し，受験者 n は問題 j に正解

受験者 m が問題 i に正解するかどうかは，受験者 n が問題 i に正解するかどうかとは無関係である。例えば，これは 2 つのサイコロ A と B を同時に振り，サイコロ A の結果とサイコロ B の結果とが無関係であるのと同じことである。このように，独立した 2 つの結果が同時に起こり得る確率は，双方の確率を掛け合わせることによって得られる。例えば，サイコロ A を振って 1 がでる確率は 1/6 である。同様に，サイコロ B を振って 1 がでる確率は 1/6 である。サイコロ A と B を同時に振って，それぞれ 1 がでる確率は，$1/6 \times 1/6 = 1/36$ になる。この考え方を受験者 m と受験者 n が問題 i に解答し、受験者 m と受験者 n が問題 j に解答したときのすべての結果に適用して記号を使って表すと，以下のようになる。

$P_{mi}P_{ni}$：受験者 m と受験者 n が問題 i に正解する確率

$(1-P_{mi})(1-P_{ni})$：受験者 m と受験者 n が問題 i に不正解する確率

$P_{mi}(1-P_{ni})$：受験者 m は問題 i に正解し，受験者 n は問題 i に不正解する確率

$(1-P_{mi})P_{ni}$：受験者 m は問題 i に不正解し，受験者 n は問題 i に正解する確率

$P_{mj}P_{nj}$：受験者 m と受験者 n が問題 j に正解する確率

$(1-P_{mj})(1-P_{nj})$：受験者 m と受験者 n が問題 j に不正解する確率

$P_{mj}(1-P_{nj})$：受験者 m は問題 j に正解し，受験者 n は問題 j に不正解する確率

$(1-P_{mj})P_{nj}$：受験者 m は問題 j に不正解し，受験者 n は問題 j に正解する確率

ラッシュモデルを導出するために受験者 m と受験者 n，問題 i と問題 j を用意した。その目的は、受験者 m と受験者 n のどちらがより高い能力を持っているかを知ることであった。受験者 m と受験者 n の能力を比べるためには，受験者 m と受験者 n の能力の差に注目する必要がある。受験者 m と受験者 n の能力の差に関する情報は，一方が問題に正解し，他方が問題に不正解したときにのみ得られる。双方が問題に正解，または不正解したときには，能力の差に関する情報は存在しない。すると注目すべき組み合わせは，以下の 4 つに限定される。

$P_{mi}(1-P_{ni})$：受験者 m は問題 i に正解し，受験者 n は問題 i に不正解する確率

$(1-P_{mi})P_{ni}$：受験者 m は問題 i に不正解し，受験者 n は問題 i に正解する確率

$P_{mj}(1-P_{nj})$：受験者 m は問題 j に正解し，受験者 n は問題 j に不正解する確率

$(1-P_{mj})P_{nj}$：受験者 m は問題 j に不正解し，受験者 n は問題 j に正解する確率

ここで測定結果の客観性について考える。測定の結果が客観的であるということは 2 つの意味を含んでいる。1 つは，ある対象物を同じ単位の複数の測定器具で計測しても，同じ結果が得られるということである。もう 1 つは，複数の対象物を単位の異なる測定器具で計測しても，対象物間の相対的距離は一定であるということである。例えば，ここに棒 A と棒 B がある。cm を単位とする物差し X で棒 A と棒 B を計測したところ，棒 A は 11 cm で棒 B は 10 cm であった。同様の方法で cm を単位とする物差し Y で棒 A と棒 B を計測したところ，棒 A は 11 cm で棒 B は 10 cm であった。cm を単位とする物差し Z でも同じ結果が得られた。これが 1 つ目の測定の客観性である。次に mm を単位とする物差しで棒 A と棒 B を計測したところ，棒 A は 110 mm で棒 B は 100 mm であった。さらに inch を単位とする物差しで棒 A と棒 B を測ったところ，棒 A は 4.33 inch で棒 B は 3.93 inch であった。単位の異なる物差しで棒 A と棒 B を計測したために得られた値は異なるが，棒 A と棒 B の相対的距離—棒 A は棒 B の 1.1 倍の長さであること—は常に一定であった。これが 2 つ目の測定の客観性である。[2]

この 2 つの測定の客観性の考え方は受験者 m と受験者 n，そして問題 i と問題 j の関係性にも適用可能である。否，測定の客観性の観点から適用されなくてはいけない。まず，1 つ目の測定の客観性の考え方を適用する。受験者 m がある能力を持ち，その能力が一定ならば，問題 i と同じ難度値を持つ問題 (x, y, z) に解答しても，正解と不正解の比率は常に一定である。このことは受験者 n についても同様である。

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} = \frac{P_{mx}}{1-P_{mx}} = \frac{P_{my}}{1-P_{my}} = \frac{P_{mz}}{1-P_{mz}}$$

$$\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}} = \frac{P_{nx}}{1-P_{nx}} = \frac{P_{ny}}{1-P_{ny}} = \frac{P_{nz}}{1-P_{nz}}$$

次に，2 つ目の測定の客観性の考え方を適用する。受験者 m と受験者 n がある能力を持ち，その能力が一定ならば，受験者 m と受験者 n が，問題 i と問題 j に何度解答しても，受験者 m と受験者 n の解答結果の正解と不正解の比率は常に一定である。これは受験者 m を棒 A に，受験者 n を棒 B に，問題 i を cm を単位とする物差しに，問題 j を mm を単位とする物差しに置き換えれば理解ができる。このことから式（4）が成立する。[3]

$$\frac{P_{mi}(1-P_{ni})}{(1-P_{mi})P_{ni}} = \frac{P_{mj}(1-P_{nj})}{(1-P_{mj})P_{nj}} \tag{4}$$

式（4）の左辺の分子 $P_{mi}(1-P_{ni})$ は，受験者 m が問題 i に正解し，受験者 n が問題 i に不正解する確率である。言い換えると，受験者 m だけが正解する確率である。左辺の分母 $(1-P_{mi})P_{ni}$ は，受験者 m が問題 i に不正解し，受験者 n が問題 i に正解する確率である。言い換えると，受験者 n だけが正解する確率である。右辺の問題 j に関しても同様のことがいえる。つまり，式（4）は，受験者 m と受験者 n がどの問題に解答しても，
［受験者 m だけが正解する確率］÷［受験者 n だけが正解する確率］ は常に一定であることを表している。[4]

3.　式の展開

式（4）を展開すると式（5）になる。[5]　式（5）の意味は，次節で説明する。

$$\frac{P_{mi}\,(1-P_{ni})}{(1-P_{mi})\,P_{ni}} = \frac{P_{mj}\,(1-P_{nj})}{(1-P_{mj})\,P_{nj}}$$

(　) の括り方を変化させて

$$\left(\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}\right)\left(\frac{1-P_{ni}}{P_{ni}}\right) = \left(\frac{P_{mj}}{1-P_{mj}}\right)\left(\frac{1-P_{nj}}{P_{nj}}\right)$$

両辺に $\dfrac{P_{ni}}{1-P_{ni}}$ を掛ける

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} = \left(\frac{P_{mj}}{1-P_{mj}}\right)\left(\frac{1-P_{nj}}{P_{nj}}\right)\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right)$$

n は標準値 = 0，j は標準値 = 0 であることが予め分かっている

このことから P_{nj}（n が j に正解する確率）は 1/2 = 0.5 である

P_{nj} に 0.5 を代入する

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} = \left(\frac{P_{mj}}{1-P_{mj}}\right)\left(\frac{1-0.5}{0.5}\right)\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right)$$

$$= \left(\frac{P_{mj}}{1-P_{mj}}\right)\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right)$$

$n = 0$，$j = 0$ より

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} = \left(\frac{P_{m0}}{1-P_{m0}}\right)\left(\frac{P_{0i}}{1-P_{0i}}\right) \tag{5}$$

4.　確率とオッズ

ここではラッシュモデルの導出のために必要な確率とオッズ（*Odds*）について簡単に説明する。ここから先，ラッシュモデルの導出のためにはやや専門的な知識が必要になる。詳細に関しては静（2007）の第 5 章までを参考にして欲しい。確率とオッズ以外の専門用語に関しては，ラッシュモデルの導出に沿って取りあげる。

4.1　確率

確率とは，標本空間においてある事象が占める割合である。標本空間とは，起こり得るすべての結果の集合である。事象とはその部分（集合）である。標本空間は *sample space* といい，頭文字をとって S で表す。

例えば，1 つのサイコロを振って出る目の標本空間は，1 から 6 までのすべてのサイコロの目を含み，以下のようになる。

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

標本空間がサイコロの目であるとき，1 から 6 までの数字の 1 つひとつが事象になる。偏りのないサイコロを何度も振ったとき，1 がでる確率は—1 が標本空間に占める割合—は 1/6 になる。

4.2　オッズ（*Odds*）

オッズとは，標本空間において，ある事象が起こる確率と起こらない確率の比である。例として，正解（a）を含む 4 択問題（a, b, c, d）を使い，正解のオッズと不正解のオッズについて説明する。

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

S = { ○　●　●　● }

○ が正解の選択肢，● が不正解の選択肢

○ 1/4, ● 1/4, ● 1/4, ● 1/4

ここで正解（a）と不正解（b, c, d）の比に注目して欲しい。オッズとは，標本空間において，ある事象が起こる確率と起こらない確率の比であると定義した。正解のオッズについて考えるとき，目線は正解の確率の側から標本空間全体に向けられる（図 1）。すると正解と不正解の選択肢の比が 1 : 3 であることが分かる。このことから正解のオッズは 1/3 になる。

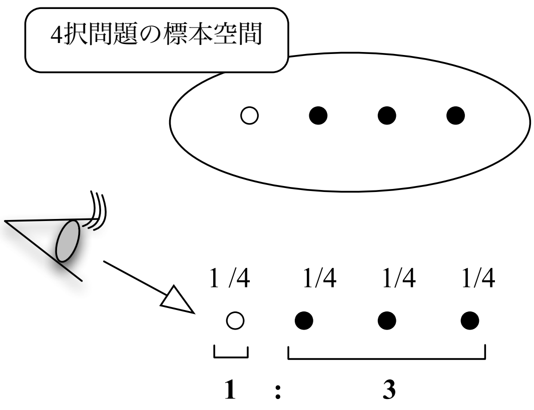

図 1. 正解のオッズ

正解のオッズは，以下の公式で求められる。

$$\text{正解の } Odds = \frac{Probability}{1 - Probability} \tag{6}$$

公式を使って正解のオッズを求めると，以下のようになる。

$$\begin{aligned}\text{正解の } Odds &= \frac{Probability}{1 - Probability} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

次に，不正解のオッズについて考える。不正解のオッズは，正解のオッズとは逆に，目線は不正解の確率の側から標本空間全体に向けられる（図 2）。すると正解と不正解の選択肢の比が 3 : 1 であることが分かる。このことから不正解のオッズは 3 になる。

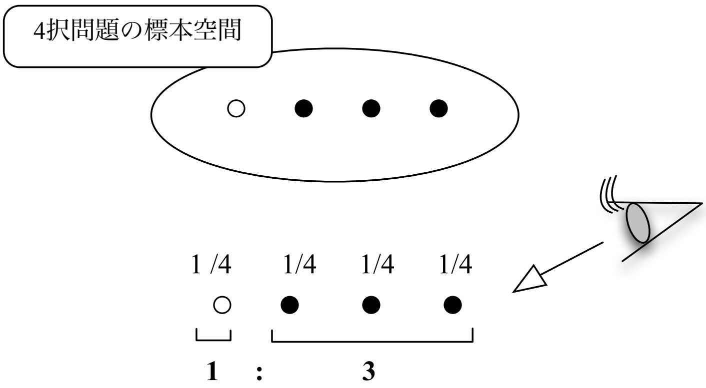

図 2. 不正解のオッズ

不正解のオッズは，以下の公式で求められる。

$$\text{不正解の } Odds = \frac{1 - Probability}{Probability} \tag{7}$$

公式を使って不正解のオッズを求めると，以下のようになる。

$$\text{不正解の } Odds = \frac{1 - Probability}{Probability}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$$

$$= 3$$

正解のオッズと不正解のオッズの公式を比べると，互いが 逆数の関係であることが分かる。

最後にもう 1 つ重要な公式を紹介する。オッズを使って確率を求める公式である。

$$Probability = \frac{Odds}{1 + Odds} \tag{8}$$

式（8）を証明をする。

$$
\begin{aligned}
Probability &= \frac{Odds}{1 + Odds} \\
&= \frac{\frac{P}{1-P}}{1 + \frac{P}{1-P}} && \text{公式（6）正解のオッズを代入} \\
&= \frac{\frac{P}{1-P}}{\frac{1-P}{1-P} + \frac{P}{1-P}} && \text{分母を通分して計算} \\
&= \frac{\frac{P}{1-P}}{\frac{1}{1-P}} \\
&= \frac{P}{1-P} \times (1-P) && 1-P\ \text{で約分} \\
&= Probability && (9)
\end{aligned}
$$

5. オッズ変換

$$\frac{P_{mi}}{1 - P_{mi}} = \left(\frac{P_{m0}}{1 - P_{m0}}\right)\left(\frac{P_{0i}}{1 - P_{0i}}\right) \tag{10}$$

式（10）は式（5）と同じものである。式（10）を注意深く見ると，各要素が P / 1 − P のオッズ形式であることが分かる。つまり式 (10) は，以下を意味している。

> 受験者 m が問題 i に正解するオッズは，受験者 m が標準的な問題に正解するオッズに，標準的な受験者が問題 i に正解するオッズを掛けたものに等しい。

ここでラッシュモデルにさらに接近するために，新しい記号を導入する。新しい記号を導入するために一工夫をする。この工夫は，後で対数変換した式の意味を理解するためにも大変重要である。これまでの説明をいったん脇に置き，以下を読み進めて欲しい。

$$\frac{P_{mi}}{1 - P_{mi}} \tag{11}$$

式（11）の分子 P_{mi} は，受験者 m が問題 i に正解する確率である。式（11）の分母 1 − P_{mi} は，受験者 m が問題 i に不正解する確率である。P_{mi} / 1 − P_{mi} は，受験者 m が問題 i に成功

するオッズであり，受験者 m が問題 i に正解するときの情報と，受験者 m が問題 i に不正解するときの情報で成り立っている。初期設定では，受験者 m の能力値と問題 i の難度値は不明であった。受験者 m の能力値と問題 i の難度値が不明のままでは，受験者 m が問題 i に成功するオッズを求めることはできない。m と i の記号を使って，受験者 m の能力値と問題 i の難度値を表現するにはどのようにすればいいのだろうか？ その鍵になるのが標準的な能力を持つ受験者 n と標準的な難度の問題 j の存在である。

まず，受験者 m の能力値について考えてみる。受験者 m が標準的な問題（難度値 = 0）に何度も正解したとき，受験者 m の能力値は，標準的な受験者の能力値（能力値 = 0）よりも高いといえる。なぜならば，標準的な能力の受験者とは，標準的な難度の問題に何度も解答したときに，正答率が 50%である受験者のことであるからだ。受験者 m が標準的な問題（難度値 = 0）に正解したときのオッズは，以下のようになる。

$$\frac{P_{m0}}{1 - P_{m0}} \tag{12}$$

式（12）に b_m という記号を導入する。これを正解のオッズとする。これは受験者 m の能力値の仮の指標になる。

$$\frac{P_{m0}}{1 - P_{m0}} = b_m \tag{13}$$

次に，問題 i の難度値について考えてみる。標準的な受験者（能力値 = 0）が問題 i に何度も不正解したとき，問題 i の難度値は，標準的な問題（難度値 = 0）よりも高いといえる。なぜならば，標準的な難度の問題とは，標準的な能力の受験者が何度も解答したときに，正答率が 50%である難度の問題のことであるからだ。ここで注意すべきなのは，問題 i の難度値を知るために，標準的な受験者が問題 i に「不正解したとき」が設定されている点である。ここで知りたいことは問題 i の難度値，つまり「問題の難しさ」である。受験者の役割が問題に正解することであるならば，問題の役割は受験者を不正解に導くことである。受験者と問題は常に勝負しており，勝負の結果，正解であれば受験者の勝ちで（受験者＞問題），不正解であれば問題の勝ちである（受験者＜問題）。受験者と問題の役割は常に逆方向を向いている。このため問題 i の難度値を知るために，標準的な受験者が問題 i に「不正解したとき」の情報が必要になる。標準的な受験者（能力値=0）が問題 i に不正解するオッズは，以下のようになる。

$$\frac{1 - P_{0i}}{P_{0i}} \tag{14}$$

式（14）に d_i という記号を導入する。これを不正解のオッズとする。これは問題 i の難度値の仮の指標である。

$$\frac{1-P_{0i}}{P_{0i}} = d_i \tag{15}$$

式（10）で得られた受験者 m が問題 i に正解するオッズに，新しく導入した正解のオッズ（b_m）と不正解のオッズ（d_i）を代入する。ここで注意すべきなのは，標準的な受験者が問題 i に正解するオッズ（$P_{0i}/1-P_{0i}$）を不正解のオッズ（d_i）で表現するために，不正解のオッズ（d_i）が逆数になっている点である。

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} = \left(\frac{P_{m0}}{1-P_{m0}}\right)\left(\frac{P_{0i}}{1-P_{0i}}\right) \qquad \frac{1-P_{0i}}{P_{0i}} = d_i \text{であるから}$$

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} = b_m \cdot \frac{1}{d_i}$$

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} = \frac{b_m}{d_i} \tag{16}$$

式（16）の意味は，受験者 m が問題 i に正解するオッズは，受験者 m が標準的な問題に正解するオッズを，標準的な受験者が問題 i に不正解するオッズで割ったものに等しいということである。

ここで靜（2007）の誤りを修正する。以下が概要で述べた重要な誤りの箇所である。靜（2007, p. 164）の 1 行目から以下の記述がある。

> 式（21）が意味するところは，ジャンパー m がバー i を跳んだときに成功するオッズは，そのジャンパーが標準的なバーを跳んだ時に成功するオッズを，標準的なジャンパーがそのバーを跳んだ時に成功するオッズで割ったものに等しいということです。

上記の「標準的なジャンパーがそのバーを跳んだ時に成功するオッズ」の記述は，正しくは「標準的なジャンパーがそのバーを跳んだ時に失敗するオッズ」である

よって靜（2007，p. 164）の該当箇所は，正しくは以下のようになる。

> 式（21）が意味するところは，ジャンパー m がバー i を跳んだときに成功するオッズは，そのジャンパーが標準的なバーを跳んだ時に成功するオッズを，標準的なジャンパーがそのバーを跳んだ時に失敗するオッズで割ったものに等しいということです。

尚，この誤りは書籍の価値を損ねるものではないことを付記しておく。

6.　対数変換

これまでの理解と公式を整理する。

受験者能力と問題難度の初期設定

能力値が不明な受験者 m

能力値が標準値 = 0 の受験者 n

難度値が不明な問題 i

難度値が標準値 = 0 の問題 j

受験者 m と受験者 n が問題 i に解答したときの組み合わせと、受験者 m と受験者 n が問題 j に解答したときの組み合わせから、情報量のあるものを抜粋

$P_{mi}(1-P_{ni})$：受験者 m は問題 i に正解し，受験者 n は問題 i に不正解する確率

$(1-P_{mi})P_{ni}$：受験者 m は問題 i に不正解し，受験者 n は問題 i に正解する確率

$P_{mj}(1-P_{nj})$：受験者 m は問題 j に正解し，受験者 n は問題 j に不正解する確率

$(1-P_{mj})P_{nj}$：受験者 m は問題 j に不正解し，受験者 n は問題 j に正解する確率

測定の客観性を踏まえた成立要件

$$\frac{P_{mi}(1-P_{ni})}{(1-P_{mi})P_{ni}} = \frac{P_{mj}(1-P_{nj})}{(1-P_{mj})P_{nj}}$$

正解するオッズ（b_m）と失敗するオッズ（d_i）の導入

式（16）と同じもの

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} = \frac{b_m}{d_i} \tag{17}$$

ここからが新しい内容になる。次に式 (17) の両辺の対数をとる。対数とは指数の逆である。指数とは「2 の 4 乗は 16 である」 のときの「4 乗」の「4」を指す。対数とは指数の逆であることから「2 を何乗すれば 16 になるのか」を考え，以下のようになる。

$$\log_2 16 = 4$$

改めて式（17）の両辺の対数をとると，以下のようになる。

$$\log\left(\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}\right)=\log\left(\frac{b_m}{d_i}\right) \tag{18}$$

両辺の対数をとることの数学的な意味の説明は本稿の範囲を超える。対数には，掛け算は足し算に（対数法則 1），割り算は引き算にする（対数法則 2）という法則があり，両辺の対数をとることによって，積の計算を和の計算に置き換えることができる。

■対数法則 1（掛け算は足し算になる）

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ であることから

$$\log_a RS = \log_a R + \log_a S \tag{19}$$

■対数法則 2（割り算は引き算になる）

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ であることから

$$\log_a \frac{R}{S} = \log_a R - \log_a S \tag{20}$$

対数法則 2 より，式（18）は，以下のように展開できる。

$$\log\left(\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}\right)=\log\left(\frac{b_m}{d_i}\right)$$

$$=\log(b_m)-\log(d_i) \tag{21}$$

7.　θ と δ の導入

さらに式を簡単にするために，新しい記号の θ（シータ）と δ（デルタ）を導入する。

$$\theta_m \equiv \log(b_m)=\log\left(\frac{P_{m0}}{1-P_{m0}}\right) \tag{22}$$

$$\delta_i \equiv \log(d_i)=\log\left(\frac{1-P_{0i}}{P_0 i}\right) \tag{23}$$

式（22）は，受験者 m の能力シータ・エム（θ_m）は，受験者 m が標準的な問題（難易度 $= 0$）に正解するオッズの対数と定義する，という意味である。これはいわば受験者 m の能力を表している。[6]

式（23）は，問題 i の難度デルタ・アイ（δ_i）は，標準的な受験者（能力値 $= 0$）が問題 i に失敗するオッズの対数と定義する，という意味である。これはいわば問題 i の難度を表している。[7]

式（22）では θ_m の後に，式（23）では δ_i の後に，≡ という数学記号が使われている。これはもとは合同を意味する数学記号であるが定義にも使われる。

式 (22) と式（23）を式（21）に代入すると，以下のようになる。

$$\log\left(\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}\right) = \log\left(\frac{b_m}{d_i}\right)$$

$$= \log(b_m) - \log(d_i)$$

$$= \theta_m - \delta_i \tag{24}$$

これがオッズのログ形式のラッシュモデルである。式（24）の意味は，受験者 m が問題 i に正解するオッズのログは，受験者 m の能力と問題 i の難度の差に等しいということである。さらにラッシュモデルを変形する。次に，対数を使った式（24）から log を外す。

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}} = \exp(\theta_m - \delta_i) \tag{25}$$

式（25）で注意すべきことは右辺の表記である。右辺は見やすさを重視して $\exp(\theta_m - \delta_i)$ と表記されているが，これは本来は以下のようになる。[8]

$$e^{(\theta_m - \delta_i)} \tag{26}$$

式（26）の exp ($e = 2.71828\cdots$) は特別な数で，この値を底とする対数 $\log_e R$ を自然対数と呼ぶ。底とは，例えば指数の $2^4 = 16$ であれば 2 を指す。対数であれば $\log_2 16 = 4$ の 2 を指す。実は，ラッシュモデルで対数といえば，すべて e を底とする自然対数を指す（靜，2007，p. 45）。このため e は省略されるが，式（24）を e で含む log 形式で表記すると，以下のようになる。

$$\log_e\left(\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}\right)=\theta_m-\delta_i$$ 底 e を省略して表記

$$\log\left(\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}\right)=\theta_m-\delta_i$$ オッズのログ形式のラッシュモデル，ここから log を外す

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}=\exp(\theta_m-\delta_i) \tag{27}$$

式（27）に注目して欲しい。左辺がオッズ形式になっていることが分かる。これがオッズ形式のラッシュモデルである。式（27）は，受験者 m が問題 i に正解するオッズは，受験者 m の能力から問題 i の難度を引いた値 $(\theta_m-\delta_i)$ で，自然対数の底 e（$=2.71828\cdots$）を累乗した結果に等しいという意味である。

オッズから確率を求められることは先述した。公式は以下のとおりである。証明は「4. 確率とオッズ」の節にある。

$$\text{正解のオッズ}=\frac{\text{正解の確率}}{1\ -\ \text{正解の確率}} \tag{28}$$

$$\text{正解の確率}=\frac{\text{正解のオッズ}}{1\ +\ \text{正解のオッズ}} \tag{29}$$

公式（29）を使い，公式（27）のオッズ形式のラッシュモデルから，確率形式のラッシュモデルに変換する。

オッズ形式のラッシュモデル

$$\frac{P_{mi}}{1-P_{mi}}=\exp(\theta_m-\delta_i)$$

両辺に $1-P_{mi}$ を掛ける

$$P_{mi}=\exp(\theta_m-\delta_i)(1-P_{mi})$$

右辺の $1-P_{mi}$ を展開する

$$P_{mi}=\exp(\theta_m-\delta_i)-P_{mi}\exp(\theta_m-\delta_i)$$

P_{mi} の要素を左辺に集める

$$P_{mi}+P_{mi}\exp(\theta_m-\delta_i)=\exp(\theta_m-\delta_i)$$

P_{mi} で左辺を括る

$$P_{mi}(1 + \exp(\theta_m - \delta_i)) = \exp(\theta_m - \delta_i)$$

両辺を $1 + \exp(\theta_m - \delta_i)$ で割る

$$P_{mi} = \frac{\exp(\theta_m - \delta_i)}{1 + \exp(\theta_m - \delta_i)} \tag{30}$$

これが確率形式のラッシュモデルである。式（30）から，受験者 m が問題 i に正解する確率は，受験者 m の能力 θ_m と問題 i の難度 δ_i の関数で表現できることが分かる。

8. まとめ

本稿の目的は，静 哲人（2007）.『基礎から深く理解するラッシュモデリング：項目応答理論とは似て非なる測定のパラダイム』関西大学出版部. をもとにラッシュモデルの導出について解説することであった。その目的が達成できたかどうかは読者の判断に委ねたい。自らが静（2007）を読み，理解に時間のかかった箇所に可能な限りの言葉を添えた。本報告論文集が Web 発行で紙面制限がゆるやかであることから，式や展開式も必要以上に記載した。しかし，もともと数学的知識に乏しいために数式の書き方や展開方法に不効率な点も多々あると思われる。本稿ではラッシュモデルの導出について解説することを重視したが，誤りは是非とも指摘して頂きたい。

静（2007）を繰り返し通読した。数ページの理解に数日を費やすこともあった。中学、そして高校と数学にしっかり取り組まなかったことを猛省しながら関連書籍を集めた。理解は少しずつ深まり，同時にラッシュモデルのシンプルさと美しさに感動した。そして書籍のわずかな誤りに気がついた。本稿で指摘した箇所に，すでに気がつかれていた方もいると思う。誤りはわずかで，注意して読めば分かる。それでもその誤りに気がついたときに，そこで理解をあきらめたり，誤って理解する初学者がいれば，それはあまりにモッタイナイことだと感じた。一人でも多くの大学院生や，ラッシュモデルに興味のある人にこの本を読んでもらいたい。その思いから静先生（大東文化大学）に連絡をし，本稿執筆の許可を頂いた。

本を手にとりぜひ通読してもらいたい。これだけの本を母語で読める恩恵を逃さないで欲しい。現役の大学院生には特にそう感じる。それは，大学院生時代にこの本を読まなかったことを恥じ，静先生の授業を受けなかったことを悔やんでいるからだ。通読した後には，竹内 理・水本 篤 (2012)『外国語教育研究ハンドブック』の「第 15 章 言語テスト理論入門—点数の意味を考えるには」松柏社. を読んでもらいたい。コンパニオン・ウェッブサイトには，「R を使った分析（ラッシュ・モデル）」（http://mizumot.com/handbook/?page_id=642/）

もある。このサイトにあるスクリプトを使えばラッシュモデルを体感できる。これだけの情報をすぐに利用できるように整理してくださった水本先生（関西大学）には感謝しきれない。

最後ではあるが，本稿執筆を快諾してくださった靜先生に記してお礼を申しあげる。先生にはお忙しい中，本稿の内容確認までして頂いた。本稿がわずかでも，ラッシュモデルを理解する手助けになればこれ以上の喜びはない。

注

1. 靜（2007）の p. 157 では，ハイジャンパーとバーを例に取りあげているが，ここではより身近な例になるように受験者と問題を取りあげた。また，前掲書ではバーが 2 つ（i, j）になるのは p. 161 以降であるが，本稿では最初から問題 2 問を設定した。
2. この 2 つの測定の客観性の考え方は間隔尺度と順序尺度と関連して，教育測定においては大変重要な問題を含んでいる。この点に関しては靜（2007）の pp. 149–156 と pp. 166–167 を是非とも読んで頂きたい。
3. 靜（2007）， p. 161 の式（16）に対応。
4. 靜（2007）， p. 160 の最後の行参照。
5. 靜（2007）， p. 162 の式（18）に対応。
6. θ（シータ）に関しては，靜（2007），p. 172 の「改めて θ（theta シータ）とは？」を参照。
7. δ（デルタ）に関しては，靜（2007），p. 174 の「δ とはいったい何？」を参照。
8. 靜（2007），p. 41 を参照。