外国語教育メディア学会（LET）関西支部 メソドロジー研究部会 2015 年度 第 7 号報告論集
住 政二郎 (pp. 25–39)

適応型テストへの応用
―ベイズ EAP 推定法とフィッシャー情報量の概説―

住 政二郎

関西学院大学

概要

本稿の目的は，ベイズ EAP 推定法とフィッシャー情報量について概説することである。著者は，項目反応理論に関連して，ラッシュモデルの導出 (住, 2013)，各モデルの概説 (住, 2014)，PROX 法と同時最尤推定法 (住, 2015) についてこれまでまとめてきた。項目反応理論は，テストの開発および結果の分析のみならず，適応型テスト (computer-adaptive testing) にも応用されている。適応型テストは，受験者能力を推定し，受験者能力にあった問題項目を出題することを特徴とする。このとき，受験者能力の推定にはベイス EAP (expected a posteriori) 推定法が，問題項目の選択にはフィッシャー情報量が利用されることが多い。しかし，適応型テストに関連する論文では，紙面の都合から、各手法を使った事実や数式のみが記載されていることが多く，詳細な説明を得ることが難しい。また，項目反応理論に関連する書籍では，数学的な知識が前提とされていることが多く，文系読者には理解が難しい。加えて，数式の記述形式に書籍間で微妙な違いがあり，初学者の理解を妨げている。本稿は著者が複数の関連書籍を通読し，その理解をまとめたものであるが，これから項目反応理論を学ぶ読者の助けになれば幸いである。

Keywords: 適応型テスト，ベイズ EAP 推定法，フィッシャー情報量，項目反応理論

1. 適応型テストについて

適応型テストは，以下のアルゴリズムを基本とする (大友, 1996, p. 273; Thissen & Mislevy, 2000, p. 101)。

a. How to start: どのように開始するか

b. How to continue: どのように続けるか

c. How to stop: どのように終了するか

上記 b のプロセスにおいて，適応型テストは，受験者能力を逐次的に推定し，受験者能力にあった問題項目を出題する。この時，受験者能力の推定にはベイス EAP 推定法が，問題項目の選択にはフィッシャー情報量が利用されることが多い。

2.　ベイズ EAP 推定法について

ベイズ EAP (expected a posteriori) 推定法は，ベイズの定理を応用し，事後分布 (posteriori distribution) に基づき未知の受験者能力パラメータ (θ) を推定する手法である。同様の手法には，ベイズ MAP (maximum a posteriori) 推定法もある。 これは単にベイズ最頻値 (Bayesian modal) 推定法と呼ばれることもある (村木, 2011, p. 83)。 MAP 推定法とは，「被験者パラメーターの事後確率分布を最大化するようなパラメータ値を求める方法である」(村木, 2011, p. 82)。ただし，MAP 推定法は，最尤推定法 (maximum likelihood estimation method) と同様に，全問正答あるいは全問誤答の場合など，受験者の回答パターンによって推定値が得られない場合があり，適応型テストには適していない。MAP 推定法と最尤推定法の性質については，涌井・涌井 (2010, p. 190) と豊田 (2002, p. 35) が詳しい。また，MAP 推定法の問題については，植野・永岡 (2009, p. 56) と村木 (2011, p. 83) が詳しい。一方で，EAP 推定法は，少人数の受験者集団に適応可能で，また，回答パターンに関わらず推定が可能であることから，適応型テストに適していることが指摘されている (村木, 2011, p. 85; 植野・永岡, 2009, p. 56)。

2.1　ベイズの定理

涌井・涌井 (2012, p. 39) を参考に，ベイズの定理について概説する。

ここにジョーカーを抜いた 1 組 52 枚のトランプがあるとする。この 1 組 52 枚のトランプは，これから起こり得るすべての事象が含まれている標本空間である。この時，抜いた 1 枚のカードがハートで絵札である確率を求める。標本空間を U，ハートを A，そして絵札を B とすると，図 1 のように表現できる。

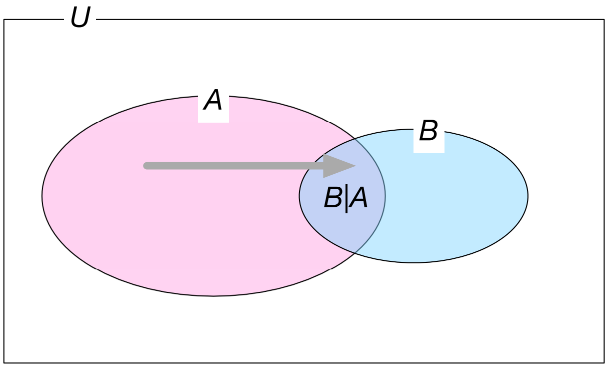

図 1. 条件付き確率 1

図 1 は，以下の式で表現できる。

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1}$$

式 (1) の左辺 $P(B|A)$ は，A が起こった時（A が起こるという条件下で）の B の確率，という意味である。これを条件付き確率という。図 1 において，A から B に向かって矢印が伸びている。注意すべき点は，A で且つ B，という意味ではない。これは，例えば，サイコロを 2 回振って，1 回目が 3 で，2 回目が 5 であるような場合を指す。これは同時確率と呼ばれ，式 (1) では右辺の分子 $P(A \cap B)$ にあたる。

図 1 を改めて見てみると，式 (1) の左辺 $P(B|A)$ の意味は，右辺の構造から，$P(A)$ (ハート全体: 52 枚中 13 枚) に占める $P(A \cap B)$ (ハートで且つ絵札: 52 枚中 3 枚) の確率 (面積) と理解することができる。計算すると以下のようになる。

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B) : \text{ハートで且つ絵札}}{P(A) : \text{ハート全体}}$$

$$= \frac{\frac{3}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{3}{13}$$

今度は逆に，抜いた 1 枚のカードが絵札で，ハートである確率を求めてみる。図 2 において，図 1 とは逆に B から A に向かって矢印が伸びており，条件付き確率も A と B の順番が図 1 とは逆になっていることに注意する。

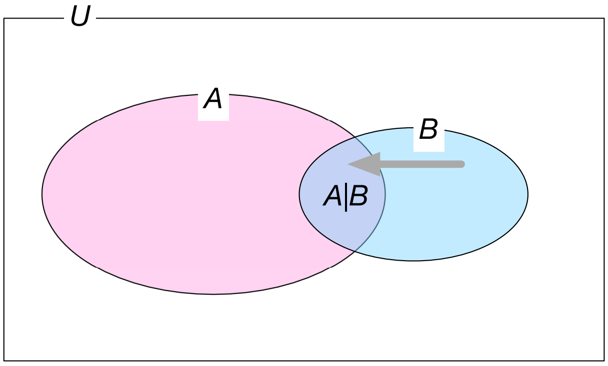

図 2. 条件付き確率 2

図 2 は，以下の式で表現でき，計算すると以下のようになる。

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2}$$

$$= \frac{\frac{3}{52}}{\frac{12}{52}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

図 2 と式 (2) から，式 (2) の左辺 $P(A|B)$ の意味は，右辺の構造から，$P(B)$ (絵札: 52 枚中 12 枚) に占める $P(A \cap B)$ (ハートで且つ絵札: 52 枚中 3 枚) の確率 (面積) と理解することができる。

ここで先の式 (1) を整理する。

$$\text{式 (1)}: \ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

両辺に $P(A)$ をかけて，左辺と右辺を入れ換える。

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \tag{3}$$

一方，式 (2) は，以下のように整理することができる。

$$式 (2): \ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

両辺に $P(B)$ をかけて，左辺と右辺を入れ換える。

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \tag{4}$$

式 (3) と (4) は乗法定理と呼ばれ，$P(A \cap B)$ に関して結合することができる。

$$式 (3): \ P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

$$式 (4): \ P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B) \tag{5}$$

式 (5) の両辺を $P(B)$ で割り，左辺と右辺を入れ換えて $P(A|B)$ に関して解くと，以下のようになる。式 (6) をベイズの定理と呼ぶ。

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{6}$$

2.2 ベイズの定理の発展

涌井・涌井 (2010, p. 39–42) と涌井・涌井 (2012, p. 72–79) を参考に，ベイズの定理を発展させる。

標本空間において，ある事象が観察された。その事象には，ある原因または仮説が影響している。このとき，標本空間を U，原因または仮説を H，事象を D とする (図 3)。

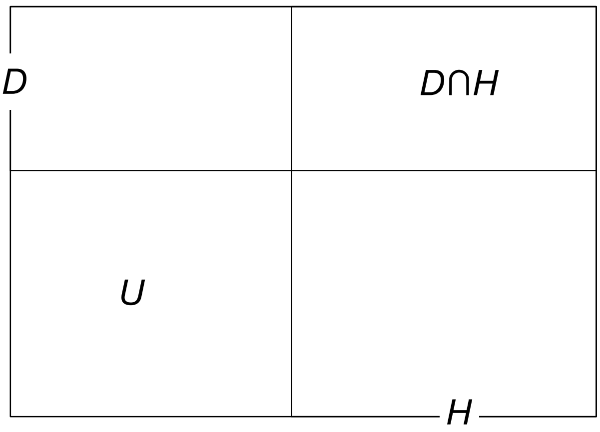

図 3. 原因・仮説 H と事象 D の関係性 1

図 3 の関係性を踏まえ，A を H に，B を D に書き換え，ベイズの定理を以下のように再定義する。

ベイズの定理　式 (6) :　$P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

$$P(H|D) = \frac{P(D|H\ )P(H)}{P(D)} \tag{7}$$

さらに, 標本空間で観察された事象 D に対して, 複数の原因または仮説 $H_i(i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ が影響しているとする (図 4)。ただし，原因または仮説 H_i は，それぞれ独立して重ならないことを仮定する。

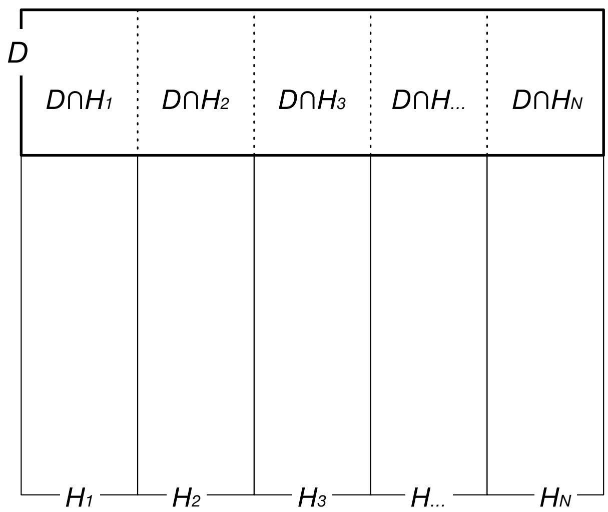

図 4. 原因・仮説 H と事象 D の関係性 2

図 4 において，D の生起確立は，H_i が独立して重ならないことを仮定すると，

$$P(D) = P(D \cap H_1) + P(D \cap H_2) + P(D \cap H_3) + \cdots + P(D \cap H_N) \tag{8}$$

となる。

ここで，式 (3) の乗法定理 $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$ から，式 (8) の $P(D \cap H_i)$ を $P(A \cap B)$ と考えと，$P(D)$ は，以下のように整理することができる。

式 8 : $P(D) = P(D \cap H_1) + P(D \cap H_2) + P(D \cap H_3) + \cdots + P(D \cap H_N)$

$P(D \cap H_i) = P(D|H_i)(H_i)$ から

$$P(D) = P(D|H_1)P(H_1) + P(D|H_2)P(H_2) + P(D|H_3)P(H_3) + \cdots + P(D|H_N)P(H_N) \tag{9}$$

式 (9) を

式 (7) : $P(H|D) = \dfrac{P(D|H)P(H)}{P(D)}$

に代入すると

$$P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i)P(H_i)}{P(D|H_1)P(H_1) + P(D|H_2)P(H_2) + P(D|H_3)P(H_3) + \cdots + P(D|H_N)P(H_N)}$$

これを一般化すると

$$P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i)P(H_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} P(D|H_i)P(H_i)} \tag{10}$$

になる。

式 (10) は，変数が，サイコロの目やトランプのカードのように中間値の存在しない離散変数の場合の一般解である。変数が，例えば体重・身長などのように無数の中間値が存在

する連続変数の場合は，分母で和の代わりに積分を用いて以下のようになる。この点に関しては，豊田 (2002, pp. 49–50) が詳しい。

$$P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i)P(H_i)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(D|H_i)P(H_i)\, dx} \tag{11}$$

式 (11) において，

$P(H_i|D)$ は，結果・データ D が原因・仮説 H_i から得られる確率を意味する。これを事後確率という。この確率に従う分布を事後分布という。

$P(D|H_i)$ は，原因・仮説 H_i の下で結果・データ D が得られる確率を意味する。これを尤度（ゆうど）という。標本空間 U で観察される結果・データ D は，ある原因・仮説 H_i に基づき生起する。しかし，事象の背景にある原因・仮説 H_i は，未知の値であるため，実際に観察された結果・データとの確率的な連鎖の値として尤度を使って表現する。

$P(H_i)$ は，結果・データ D を得る前の原因・仮説 H_i の確からしさを意味する。これを事前確率といい，この確率に従う分布を事前分布という。

式 (11) において, 右辺の分母は, 分子の積分になっている。ということは, 分子が分かれば分母も分かる。この時，分母，つまり観察された事象の生起確立 $P(D) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(D|H_i)P(H_i)$ を定数と見なすと，式 (11) は以下のように省略することができる。

$$P(H_i|D) \propto P(D|H_i)P(H_i) \qquad (i = 1, 2, 3, ..., N) \tag{12}$$

上記式 (12) の意味は，事後確率は，尤度と事前確率の積に比例する（$\propto$），という意味である。

ベイズの定理は，標本空間 U において観察される事象 = 事後分布は，原因・仮説 H と結果・データ D との確率的な連鎖として捉えている。さらに，事象の生起に対して常に一定の影響を与える値を事前確率として取り込むことによって，人間の経験や常識を反映した結果 = 事後確率を計算することができるとされている。計算された事後確率は，次の計算の事前確率として利用され，新たな事後確率が計算される。このプロセスをベイズ更新と呼び，これを繰り返すことによって未知のパラメーターを推定しようとするのが，ベイズの定理を利用した推定の基礎である。

2.3　ベイス EAP 推定法

ベイズ EAP 推定法は，EAP (expected a posteriori) の名称が示すとおり，「被験者パラメーター θ_i の事後確率分布の期待値を推定する」方法である (村木, 2011, p. 84)。期待値 (expected value) とは，確率変数の平均である。観察される事象（$x_1, x_2, ...x_n$）が，確率分布に従って一定の頻度で生起する場合に，その平均を求めるのに等しい。では，なぜ期待値を利用するのだろうか。それは，「能力値の尤度が最も高くなるのは，その能力値のもとで期待得点が実際の得点に等しくなるとき」（靜, 2007, p. 234, p. 239; 住, 2015, p. 97）であるからである。つまり，ベイズ EAP 推定法とは，（誤差を含む応答データの）観測値と（潜在的な真の力の）期待値との差である残差を限りなく小さくし，2 つの値を近づける作業ともいえる。

期待値は，記号で $E(X)$ と表す。以下，Khan Academy (2009) の教材を参考に概説する。

サイコロを 6 回降って，

2，2，3，5，5，6

が得られたとする。これを標本空間 U とする。この変数の平均値は，

$$\frac{(2+2+3+5+5+6)}{6} = 3.8 \tag{13}$$

になる。期待値は，確率変数の平均であることから，式 (13) を以下のように変形する。括弧で添えられた数字は，各変数の出現回数を表している。また，%の表記を加えることで，各変数の出現頻度が分かる。

$$\begin{aligned}
\frac{(2)2+1(3)+2(5)+1(6)}{6} &= \frac{1}{6}(2\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 5+1\cdot 6) \\
&= \frac{2}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{2}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6 \\
&= 0.33\cdot 2+0.17\cdot 3+0.33\cdot 5+0.17\cdot 6 \\
&= 33\%\cdot 2+17\%\cdot 3+33\%\cdot 5+17\%\cdot 6 \qquad (14) \\
&= 0.66+0.51+1.65+1.02 = 3.8
\end{aligned}$$

式 (14) の形式を念頭に置き，確率変数 X と確率 $P(X = x)$　$(x = 1, 2, 3, \dots, n)$ が得られるとき，離散型確率変数の期待値 $E(X)$ は，以下のように一般化できる。

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \tag{15}$$

連続確率変数の期待値 $E(X)$ は，以下のように一般化できる。

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx \tag{16}$$

連続確率変量のベイズの定理の発展公式は，式 (11) より以下のとおり得られた。

$$\text{式 (11) : } P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i)P(H_i)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(D|H_i)P(H_i)\, dx}$$

式 (11) において $P(D|H_i)$ は，尤度（likelihood）であることから，記号 L に書き換える。

$$P(H_i|D) = \frac{L(D|H_i)P(H_i)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} L(D|H_i)P(H_i)\, dx} \tag{17}$$

連続確率変数の期待値 $E(X)$ の式 (16) に，式 (17) を代入し，未知のパラメータ θ の期待値を求める。この時，事前分布の $P(H)$ は，正規分布 $g(\theta)$ に従うこととする。

$$\begin{aligned} E(\theta_i|D) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i \cdot f(\theta_i)\, d\theta_i \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i \cdot \frac{L(D \mid \theta_i)\; g(\theta_i)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} L(D \mid \theta_i)\; g(\theta_i)\; d\theta_i} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i\; L(D \mid \theta_i)\; g(\theta_i)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} L(D \mid \theta_i)\; g(\theta_i)\; d\theta_i} \end{aligned} \tag{18}$$

式 (18) において，項目応答理論の表現形式に合わせて D を項目困難度パラメーターに変更すると，村木 (2011, p. 85) のベイズ EAP 推定法の式 (5.19) と一致する。

3.　フィッシャー情報量について

適応型テストは，受験者能力を逐次的に推定し，受験者能力にあった問題項目を出題することを特徴とする。この時，問題項目の選択には，フィッシャー情報量が利用されることが多い。では，なぜフィッシャー情報量が利用されることが多く，どのような基準で問題項目は選択されるのだろうか。

3.1　最尤推定の性質

N 個の観測値が，ある一定の母数分布に基づく確率変数 $P(X)$ に従って生起するとき，観測値が最も生起しやすい尤度関数を推定しようとするのが最尤推定 (maximum likelihood estimation) である。

豊田 (2002, pp. 64–65) は，最尤推定の特徴として以下の 3 つをあげている。

1. 最尤推定値の標本分布は，n が大きくなるに従って，限りなく正規分布に近づく
2. 最尤推定値の標本分布の平均（期待値）は，n が大きくなるに従って，限りなく真値 θ_i に近づく
3. 最尤推定値の標本分布の分散は，n が大きくなるに従って，限りなく $\frac{1}{I(\theta)}$ に近づく。このとき，$I(\theta)$ をフィッシャー情報量と呼ぶ

$$V[\hat{\theta}_i \mid \theta_i] = \frac{1}{I(\theta_i)}$$

$V[\hat{\theta}_i \mid \theta_i]$ は，θ_i が与えられたときの $\hat{\theta}_i$ の分散という意味である。

上記 3 に関して，豊田 (2002, p.65) は，途中式を省略し，以下のようにフィッシャー情報量を定義している。

$$I(\theta_i) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log L\,(u_i \mid \theta)\right)^2_{\theta=\theta_i}\right] \tag{19}$$

以上のことから，式 (19) $I(\theta)$ の逆数は，最尤推定値の標本分布の分散 $\frac{1}{I(\theta)}$ になる。その平方根は，最尤推定値の標本分布の標準偏差 $\frac{1}{\sqrt{I(\theta)}}$ になる。標準偏差は，標本分布の母平均からの誤差を表す。$I(\theta)$ と最尤推定値の標本分布の分散とが逆数の関係であることから，$I(\theta)$ が最大となる問題項目を選択することは，標準偏差が最小となる問題項目を選択することになり，結果的に母平均に近づくことを意味する。これがフィッシャー情報量 $I(\theta)$ が問題項目の選択に利用される原理になる。

3.2　フィッシャー情報量の導出

確率変数 $X(x_i = x_1, x_2, x_3,\ \ldots, x_N)$ が，未知のパラメータ θ を持つ関数に従う時，以下のようなデータが得られたとする。

No.	x_i	確率
1	x_1	$P(X = x_1\ ;\ \theta)$
2	x_2	$P(X = x_2\ ;\ \theta)$
3	x_3	$P(X = x_3\ ;\ \theta)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	x_N	$P(X = x_N\ ;\ \theta)$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ となる確率 $P(x_i\ ;\ \theta)$ は，以下の同時確率で求められる。

$$P(x_i\ ;\ \theta) = P(X = x_1\ ;\ \theta) \cdot P(X = x_2\ ;\ \theta) \cdot P(X = x_3\ ;\ \theta) \cdot\ \cdots\ \cdot P(X = x_N\ ;\ \theta) \tag{20}$$

このとき，式 (20) をパラメータ θ の尤度関数と呼び，以下のようにあらわす。

$$L(\theta\ ;\ X = x_1, x_2, x_3,\ \ldots,\ x_N) = P(X = x_1, x_2, x_3,\ \ldots,\ x_N\ ;\ \theta) \tag{21}$$

そして，$L(\theta\ ;\ X = x_1, x_2, x_3,\ \ldots, x_N)$ を最大化する未知のパラメータ θ を推定することを最尤法という（石村・劉・石村, 2010）。尚，上記の最尤法の表現形式は，石村・劉・石村 (2010, p. 62) を参照にした。

式 (21) の $L(\theta\ ;\ x_i)$ において，$P(x_i\ ;\ \theta)$ とは，x_i と θ の順番が入れ代わっていることに注意する。$L(\theta\ ;\ x_i)$ の意味は，標本母集団の大きさ N において，観測値 $x_1, x_2, x_3,\ \ldots,\ x_N$ が得られたことを条件として θ の値を最大化するという意味である。文献によっては，条件確率を使って $L(\ \theta\ |\ x_i)$ と表現しているものもある。また，特に x と θ の順番を入れ換えていないものもある。

$L(\theta\ ;\ x_i)$ は，式 (20) のとおり，N 個の積から成る同時確率である。かけ算は計算量が多く複雑であるため対数変換をする。これを対数尤度関数という。

$$\log L(\theta\ ;\ x_1, x_2, x_3,\ \ldots, x_N) \tag{22}$$

次に，$L(\theta;\ x_1, x_2, x_3,\ \ldots, x_N)$ の値を最大化する未知のパラメータ θ を求めるために，対数誘導関数を微分する。微分をすることによって，瞬間的な関数の傾きの値を得ることができる (静, 2007, pp. 53–74)。これをスコア関数という。

$$U(\theta;\ x_i) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ log\ L\ (\theta;\ x_i) \tag{23}$$

スコア関数は，確率変数であるため期待値と分散を求めることができる。

$$E\ [U(\theta;\ x_i)] \tag{24}$$

式 (24) のスコア関数の期待値は，0 になることが知られている。

確率変数の分散は，以下の要領で求められる。これを分散公式と呼ぶ (村木, 2011, p.14)。

確率変数の分散 = [確率変数の 2 乗の期待値]−[確率変数の期待値の 2 乗]

$$Var\ [U(\theta;\ x_i)] = E\ [U(\theta;\ x_i)^2] - (E\ [U(\theta;\ x_i)])^2$$

スコア関数の期待値は 0 であるから，$(E\ [U(\theta;\ x)])^2 = 0$ となる。

$$Var\ [U(\theta;\ x_i)] = E\ [U(\theta;\ x_i)^2] \tag{25}$$

$U(\theta;\ x_i)$ はスコア関数であるから，式 (25) は以下のように整理できる。式 (26) は，フィッシャー情報量 $I(\theta)$ と呼ばれ，豊田 (2002, p. 65) 式 (18) とも一致する。尚，豊田 (2002) では，尤度関数を表現する際に x_i と θ の順番を入れ換えておらず，また，条件付き確率の形式を使っているため，本文の式とは若干異なるものになっている。

$$Var\ [U(\theta;\ x_i)] = E\ [U(\theta;\ x_i)^2]$$

$$= E\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log L\ (\theta;\ x_i)\right)^2\right]$$

$$I(\theta) = E\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log L\ (\theta;\ x_i)\right)^2\right] \tag{26}$$

さらに，豊田 (2002, p. 66) では，項目反応理論の各モデルのフィッシャー情報量を紹介している。項目 j を受験者能力 θ を持つ受験者 i が受験した際のフィッシャー情報量は，項目反応理論の各モデルにおいて以下のようになる（豊田，2002, pp. 68–69)。

1 パラメーター・ロジスティックモデル

$$I_j\,(\theta_i) = 1.7^2\,a^2\,p_j(\theta_i)\,q_j(\theta_i) \tag{27}$$

2 パラメーター・ロジスティックモデル

$$I_j\,(\theta_i) = 1.7^2\,a_j^2\,p_j(\theta_i)\,q_j(\theta_i) \tag{28}$$

3 パラメーター・ロジスティックモデル

$$I_j\,(\theta_i) = 1.7^2\frac{a_j^2\,(p_j(\theta_i) - c_j)^2\,q_j(\theta_i)}{p_j(\theta_i)\,(1 - c_j)^2} \tag{29}$$

上記モデルの内，1 パラメーター・ロジスティックモデルと 2 パラメーター・ロジスティックモデルにおいて，フィッシャー情報量は項目困難度と等しいとき，その値が最大となる。3 パラメータ・ロジスティックモデルにおいても，項目困難度からは大きくずれることはない（豊田, 2002, p. 69)。

受験者に対して問題項目を選択する際に重要な点は，受験者の能力を十二分に発揮させることである。そのためには，受験者が解けるか，それとも解けないか五分五分の難易度の問題項目を出題することが必要になる。なぜならば，易しすぎる問題や難しすぎる問題では，受験者が問題項目に取り組む前に正誤が決定してしまい「意外性」(静, 2007, p. 272）がなく，受験者の能力に関して新たな情報を得ることができないからである。以上のことから，項目選択においては，フィッシャー情報量を使って，$I(\theta) = b$，またはその近似値を持つ問題項目が選択されることになる。

4. まとめ

本稿では，ベイズ EAP 推定法とフィッシャー情報量について概説をした。項目反応理論は外国語教育の分野でも適応型テストとして幅広く活用されながらも，その原理を理解することは敷居の高いものであった。数式の細かな展開式は理解しなくとも，原理を理解すれば数式の意味が見えてくる。原理が分かると絵のような見えていた記号の集まりの数式

から意味が見えてくる。そして，項目反応理論の醍醐味をより深く理解することができる。このことは著者自身の経験とも重なる。本稿がこれから項目反応理論を学ぶ読者の一助となれば幸いである。そして本稿の誤りや不十分な点は，新たな読者に是非とも指摘して頂きたい。

参考文献

石村 貞夫・劉 晨・石村 光資郎 (2010).『入門はじめての統計的推定と最尤法』東京図書株式会社.

Khan Academy. (2009, February 24). *Expected Value: E(x)*. [Video file]. Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=j__Kredt7vY

村木 英治 (2011).『シリーズ〈行動計量の科学〉8 項目反応理論』朝倉書店.

大友 賢二 (1996).『項目応答理論入門』大修館書店.

靜 哲人 (2007).『基礎から深く理解するラッシュモデリング：項目応答理論とは似て非なる測定のパラダイム』関西大学出版.

住 政二郎 (2013).「ラッシュモデルの導出」『メソドロジー研究部会 2012 年度報告論集第 3 号』83–101. Retrieved from http://www.mizumot.com/method/2012-07_Sumi.pdf

住 政二郎 (2014).「項目反応理論：1PLM, 2PLM, 3PLM」『メソドロジー研究部会 2013 年度報告論集第 4 号』34–62. Retrieved from http://www.mizumot.com/method/04-04_Sumi.pdf

住 政二郎 (2015).「PROX 法と同時最尤推定法の概説」『メソドロジー研究部会 2014 年度報告論集第 6 号』96–116 Retrieved from http://www.mizumot.com/method/06-06_Sumi.pdf

豊田 秀樹 (2002).『項目反応理論［入門編］：テストと測定の科学』朝倉書店.

植野 真臣・永岡 慶三 (2009).『e テスティング』培風館.

涌井 良幸・涌井 貞美 (2010). 『Excel でスッキリわかるベイズ統計入門』日本実業出版社.

涌井 良幸・涌井 貞美 (2012). 『史上最強図解 これならわかる! ベイズ統計学』株式会社ナツメ社.